Exercice1 : (2 points) (1p+1p)

Factorisez les expressions suivantes : $A=4x^2-(x-1)^2$

$B=8x^3+27$ **et** $C=x^3+1+2(x^2-1)-(x+1)$

Solution:

1) $A=4x^2-(x-1)^2=(2x)^2-(x-1)^2=(2x-(x-1))(2x+(x-1))$

$A=(2x-x+1)(2x+x-1)=(x+1)(3x-1)$

2) On remarque que : $B=(2x)^3+3^3$

D'après l'identité remarquable :

$a^3+b^3=(a+b)(a^2-a\times b+b^2)$

On a : $B=(2x+3)((2x)^2-2x\times3+3^2)=(2x+3)(4x^2-6x+9)$

3) $C=x^3+1+2(x^2-1)-(x+1)$

$C=x^3+1^3+2(x^2-1^2)-(x+1)$

$C=(x+1)(x^2-x\times1+1^2)+2(x-1)(x+1)-(x+1)\times1$

$C=(x+1)((x^2-x+1)+2(x-1)-1)$

$C=(x+1)(x^2-x+1+2x-2-1)$

$C=(x+1)(x^2+x-2)$

Exercice2 : (2 points)

Calculer et simplifier : $G=\left(\dfrac{5^3\times2^{-3}}{4\times25}\right)^2\times\dfrac{2^8}{10^2\times5}$

Solution:

$$G=\left(\frac{5^3\times2^{-3}}{4\times25}\right)^2\times\frac{2^8}{10^2\times5}=\frac{5^6\times2^{-6}}{(2^2\times5^2)^2}\times\frac{2^8}{(2^2\times5^2)\times5}$$

$$G=\frac{5^6\times2^{-6}\times2^8}{2^4\times5^4\times2^2\times5^2\times5}=\frac{5^6\times2^2}{2^6\times5^7}=\frac{1}{2^4\times5}=\frac{1}{80}$$

Exercice3 : (6 points) (2p+2p+1p+1p)

On pose : $a=\sqrt{19+6\sqrt{10}}$ et $b=\sqrt{19-6\sqrt{10}}$

1) Montrer que : $a\times b=1$

2) On pose : $u=a+b$ et $V=a-b$

Calculer u^2 et v^2

3) En déduire une écriture des nombres u et v

4)En déduire une écriture des nombres a et b

Solution:1)

$ab=\sqrt{19+6\sqrt{10}}\sqrt{19-6\sqrt{10}}=\sqrt{(19+6\sqrt{10})(19-6\sqrt{10})}$

$ab=\sqrt{19^2-(6\sqrt{10})^2}=\sqrt{361-360}=\sqrt{1}=1$

2) $u=a+b$ et $V=a-b$

$u^2=(a+b)^2=a^2+b^2+2ab=a^2+b^2+2\times1$

Donc: $u^2=19+6\sqrt{10}+19-6\sqrt{10}+2\times1=40$

$v^2=(a-b)^2=a^2+b^2-2ab=a^2+b^2-2\times1$

Donc : $v^2=19+6\sqrt{10}+19-6\sqrt{10}-2\times1=36$

3) déduction des nombres u et v :

On a : $u^2=40$ Donc : $u=\sqrt{40}$ ou $u=-\sqrt{40}$

Or on a $u=a+b$ somme de deux nombres positifs

Alors : $u=a+b$ est positif donc : $u=\sqrt{40}=\sqrt{4\times10}=2\sqrt{10}$

On a : $v^2=36$ Donc $v=\sqrt{36}$ ou $v=-\sqrt{36}$

Or on a : $v=a-b$ et on Remarque que $a>b$

Donc : $v=a-b$ est positif donc : $v=\sqrt{36}=6$

4) déduction des nombres a et b

On a: $\begin{cases}u=2\sqrt{10}\\v=6\end{cases}$ ssi $\begin{cases}a+b=2\sqrt{10}\\a-b=6\end{cases}$

On fait la somme membre a membre on trouve :

$2a=6+2\sqrt{10}$ Donc : $a=\dfrac{6+2\sqrt{10}}{2}=3+\sqrt{10}$

Et on a : $a+b=2\sqrt{10}$ Donc: $b=2\sqrt{10}-a$

Donc : $b=2\sqrt{10}-3-\sqrt{10}$ cad $b=\sqrt{10}-3$

Exercice4 : (2 points)

Simplifier et écrire sans symbole de la valeur absolue :

$A=|2\sqrt{3}-4|+|2-\sqrt{3}|-|6-3\sqrt{3}|$

Solution:

On a : $2\sqrt{3}<4$ car : $(2\sqrt{3})^2<4^2$ donc : $2\sqrt{3}-4\in\mathbb{R}^-$

Donc : $|2\sqrt{3}-4|=-(2\sqrt{3}-4)=-2\sqrt{3}+4$

Et on a : $\sqrt{3}<2$ donc : $2-\sqrt{3}\in\mathbb{R}^+$ donc : $|2-\sqrt{3}|=2-\sqrt{3}$

Et on a $3\sqrt{3}<6$ car $(3\sqrt{3})^2<6^2$ donc : $6-3\sqrt{3}\in\mathbb{R}^+$

Donc : $\left|6-3\sqrt{3}\right|=6-3\sqrt{3}$

Donc : $A=-2\sqrt{3}+4+2-\sqrt{3}-\left(6-3\sqrt{3}\right)=-2\sqrt{3}+4+2-\sqrt{3}-6+3\sqrt{3}$

$A=-3\sqrt{3}+3\sqrt{3}+6-6=0$

Exercice5 : (2 points)

Soit x un élément de l'intervalle : $\left]-\infty,-2\right[$

Comparer : 5 et $-4x-1$ **(**En utilisant les propriétés de l'ordre)

Solution : $x\in\left]-\infty;-2\right[$ donc $x<-2$

Donc : $(-4)\times x\succ(-2)\times(-4)$ donc : $-4x\succ 8$

Donc : $-4x-1\succ 8-1$ donc : $-4x-1\succ 7$ ①

Et on sait que : $7\succ 5$ ②

Donc de ① et ② en déduit que : $-4x-1\succ 5$

Exercice6 : (2 points) Soit $x\in\mathbb{R}^+$

Comparer les nombres : $2\sqrt{x}-1$et x

Solution :

$x-\left(2\sqrt{x}-1\right)=x-2\sqrt{x}+1=\left(\sqrt{x}\right)^2-2\sqrt{x}\times1+1^2=\left(\sqrt{x}-1\right)^2\geq 0$

Donc : $x\geq\left(2\sqrt{x}-1\right)$ si $x\in\mathbb{R}^+$

Exercice7 : (4 points) (1p+1p+1p+1p)

Le plan est rapporté au Repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ et

Soient les points $A\left(-1,2\right)$; $B\left(3,1\right)$

Et les droites : $\left(D_1\right):2x+8y+2=0$ et $\left(D_2\right):x-y-2=0$

1) Montrer que les droites $\left(D_1\right)$et $\left(D_2\right)$ sont sécantes et déterminer le point d'intersection H (x ; y)

2) Donner une équation cartésienne de la droite (AB)

3) étudier la position relative des droites (AB) et $\left(D_1\right)$

4) Donner une représentation paramétrique de la droite $\left(\Delta\right)$ Qui passe par le point $C\left(3,-1\right)$et parallèle a $\left(D_2\right)$

Solution :1) On a : $2\times(-1)-8\times1=-10\neq0$

Donc : $\left(D_1\right)$et $\left(D_2\right)$se coupent et Le point d'intersection vérifie le système : $\begin{cases}2x+8y+2=0\\x-y-2=0\end{cases}$

$\begin{cases}2x+8y+2=0\\x-y-2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+4y=-1\\x-y=2\end{cases}$

On utilise la méthode des déterminants par exemple pour résoudre ce système : $\Delta=\begin{vmatrix}1&4\\1&-1\end{vmatrix}=-5\neq0$

Donc : $x=\dfrac{\begin{vmatrix}-1&4\\2&-1\end{vmatrix}}{\Delta}=\dfrac{-7}{-5}=\dfrac{7}{5}$ et $y=\dfrac{\begin{vmatrix}1&-1\\1&2\end{vmatrix}}{\Delta}=-\dfrac{3}{5}$

Donc : le point d'intersection est $H\left(\dfrac{7}{5};-\dfrac{3}{5}\right)$

2) la droite (AB) a une équation de la forme :

(AB) : $ax+by+c=0$

Un vecteur directeur est : $\overrightarrow{AB}\left(4,-1\right)$ $\overrightarrow{AB}\left(-b,a\right)$

Donc : $a=-1$ et $-b=4$ donc $b=-4$

L'équation devient : $-1x-4y+c=0$

On a : $A\in\left(AB\right)$ donc : $1-8+c=0$ cad $c=7$

Donc : $\left(AB\right)$ $x+4y-7=0$

3) $\left(D_1\right):2x+8y+2=0$ et$\left(AB\right)$ $x+4y-7=0$

Et on a : $2\times4-8\times1=0$ Donc : $\left(D_1\right)$et $\left(AB\right)$sont parallèles

4) $\left(\Delta\right)$est parallèles$\left(D_2\right)$ donc le vecteur directeur de $\left(D_2\right)$ Est un vecteur directeur de $\left(\Delta\right)$

Donc : $\vec{u}\left(1,1\right)$est un vecteur $\left(\Delta\right)$ qui passe par $C\left(3,-1\right)$

Donc : : $\left(\Delta\right)\begin{cases}x=3+t\\y=-1+t\end{cases}\left(t\in\mathbb{R}\right)$

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron »
Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien