Correction : devoir libre de préparation pour le devoir surveillé n°1 sur les leçons suivantes : Arithmétique et les vecteurs du plan

Exercice01 : On pose : $a=540000$

1) Décomposer en produit de facteurs premiers l'entier a

2)Déterminer le plus petit entier naturel non nul qu'il faut multiplier par a pour trouver un carré d'un entier qu'il faut déterminer

540000	2
270000	2
135000	2
337550	2
67500	2
16875	3
5625	3
1875	3
625	5
125	5
25	5
1	

Solution :1) $540000=2^5\times3^3\times5^4$

2)Pour que a soit un carré d'un entier il faut que tous les exposants des nombres premiers dans sa décomposition soit pair

$2^5\times3^3\times5^4\times2\times3=2^6\times3^4\times5^4$

$=\left(2^3\times3^2\times5^2\right)^2=(1800)^2$

Donc : on doit multiplier a par : $2\times3=6$

Exercice02 :

Déterminer la parité des nombres suivants : $n\in\mathbb{N}$ et $m\in\mathbb{N}$

1) 375^2+648^2 2) $2n+16$ 3) $10n+5$ 4) $18n+4m+24$

5) $2n^2+7$ 6) $8n^2+12nm+3$ 7) $26n+10m+7$

8) $n^2+11n+17$ 9) $n^2+7n+20$ 10) $(n+1)^2+7n^2$

11) n^2+5n 12) n^2+8n 13) n^2+n 14) n^3-n

15) $5n^2+n$ 16) $4n^2+4n+1$ 17) $n^2+13n+17$

18) $n+(n+1)+(n+2)$

Solution : 1) 375^2+648^2

648^2 Est paire car le carré d'un nombre pair

375^2 est impair car le carré d'un nombre impair

375^2+648^2 C'est la somme d'un nombre impair Et un nombre pair donc c'est un nombre impair

2) $2n+16=2(n+8)=2\times k$ avec $k=n+8$

Donc $2n+16$ est un nombre pair

3) $10n+5=2(5n+2)+1=2\times k+1$ avec $k=5n+2$

Donc $10n+5$ est un nombre impair

4) $18n+4m+24=2(9n+2m+12)=2k$

Avec : $k=9n+2m+12$

Donc $18n+4m+24$ est un nombre pair

5) $2n^2+7=2n^2+6+1=2(n^2+3)+1=2k+1$

Avec : $k=n^2+3$ Donc $2n^2+7$ est un nombre impair

6) $8n^2+12nm+3=2(4n^2+4nm+1)+1=2k+1$

Avec : $k=4n^2+4nm+1$

Donc $8n^2+12nm+3$ est un nombre impair

7) $26n+10m+7=2(13n+5m+3)+1=2k+1$

Avec : $k=13n+5m+3$

Donc $26n+10m+7$ est un nombre impair

8)

$n^2+11n+17=n^2+n+10n+16+1=n(n+1)+2(5n+8)+1$

$n(n+1)$ est le produit de Deux nombres consécutifs donc est un nombre pair

$n^2+11n+17=2k+2k'+1=2(k+k')+1=2k''+1$

Avec $k'=6n+8$ et $k''=k+k'$

Donc $n^2+11n+17$ est un nombre impair

9)

$n^2+7n+20=n^2+n+6n+20=n(n+1)+2(3n+10)$

$n(n+1)$ est le produit de Deux nombres consécutifs donc est un nombre pair

$n^2+7n+20=2k+2k'+1=2(k+k')=2k''$

Donc $n^2+7n+20$ est un nombre pair

10)

$(n+1)^2+7n^2=n^2+2n+1+7n^2=8n^2+2n+1=2(4n^2+n)+1=2k+1$

Donc $(n+1)^2+7n^2$ est un nombre impair

11)

$n^2+5n=n^2+n+4n=n(n+1)+4n=2k+4n=2(k+2n)$

Car $n(n+1)$ est le produit de Deux nombres consécutifs donc est un nombre pair

Donc n^2+5n est un nombre pair

12) étude de la parité n^2+8n

1cas : n pair

$n^2=n\times n$ est aussi pair car le carré d'un nombre pair et $8n=2\times4n=2\times k$ est pair

Donc : n^2+8n est pair C'est la somme de deux Nombre pair

2cas : n impair

$n^2=n\times n$ est aussi impair car le carré d'un nombre impair et $8n=2\times4n=2\times k$ est pair

Donc : n^2+8n est impair C'est la somme d'un nombre pair et un nombre impair

13) $n^2+n=n(n+1)$ est le produit de Deux nombres consécutifs donc est un nombre pair

14) n^3-n $n\in\mathbb{N}$

$n^3-n=n(n^2-1)=n(n^2-1^2)=n(n-1)(n+1)$

$n^3-n=(n-1)\times n\times(n+1)$

est le produit de trois nombres consécutifs donc est un nombre pair

15) $5n^2+n$ $n\in\mathbb{N}$

$5n^2+n=4n^2+n^2+n=4n^2+n(n+1)=2\times2n^2+2k=2\times(2n^2+k)=2\times k'$

Avec : $k'=6n+8$ et $k''=k+k'$

Car $n(n+1)$ est le produit de Deux nombres consécutifs donc est un nombre pair

Donc $5n^2+n$ est un nombre pair

16) $4n^2+4n+1 \quad n\in\mathbb{N}$

$4n^2+4n+1=(2n)^2+2\times2n\times1+1^2=(2n+1)^2$

Donc est un nombre impair car $2n+1$ est un nombre impair et le carré d'un nombre impair est impair

17) $n^2+13n+17$

$n^2+13n+17=n^2+n+12n+16+1=n(n+1)+2k'+1$

$=2k+2k'+1=2(k+k')+1=2k''+1$

Car $n(n+1)$ est le produit de Deux nombres consécutifs donc est un nombre pair

Donc $n^2+13n+17$ est un nombre impair

18) $n+(n+1)+(n+2)$

1cas : n pair

$n+(n+1)+(n+2)$ est impair

2cas : n impair

$n+(n+1)+(n+2)$ est pair

Exercice03 : Soit n est un nombre entier naturel impair

1)Verifier que n^2-1 est un multiple de 8 dans cas suivants : $n=1$; $n=3$; $n=5$; $n=7$

2) Montrer que : n^2-1 est un multiple de 4 si n est impair

3) Montrer que n^2-1 est un multiple de 8 si n est impair

4) En déduire que : n^4-1 est un multiple de 16 si n est impair

5) Montrer que si n et m sont impairs alors : n^2+m^2+6 est un multiple de 8

Solution :1) si $n=1$ alors $1^2-1=0$ est un multiple de 8

Si $n=3$ alors $3^2-1=8$ est un multiple de 8

Si $n=5$ alors $5^2-1=24$ est un multiple de 8

Si $n=7$ alors $7^2-1=48$ est un multiple de 8

2) n *est impair* donc : $n=2k+1$

Donc : $n^2-1=(2k+1)^2-1=(2k)^2+2\times2k\times1+(1)^2-1$

$n^2-1=4k^2+4k+1-1=4k^2+4k=4(k^2+k)=4\times k'$

Avec $k'=k^2+k$

Donc : n^2-1 *est un multiple de 4*

3)on a trouvé : $n^2-1=4k(k+1)$

Or $k(k+1)$ est le produit de deux nombres consécutifs donc est un nombre pair donc : $k(k+1)=2k'$

Donc : $n^2-1=8k'$

Donc : n^2-1 est un multiple de 8

4) $n^4-1=(n^2)^2-1^2=(n^2-1)(n^2+1)$

Et *on a trouvé que :* $n^2-1=4k'$

Et *on a :*

$n^2+1=4k^2+4k+1+1=4k^2+4k+2=4(k^2+k+1)=4\times k''$

Donc : $n^4-1=(n^2-1)(n^2+1)=(4k')(4k'')=16k'''$

Donc : n^4-1 est un multiple de 16

5) *on a trouvé que:* n^2-1 est un multiple de8

Donc : $n^2-1=8k$ donc : $n^2=8k+1$

De même on a : : m^2-1 est un multiple de8

Donc : $m^2-1=8k'$ donc : $m^2=8k'+1$

$n^2+m^2+6=8k+1+8k'+1+6=8k+8k'+8=8(k+k'+1)=8k''$

Donc : n^2+m^2+6 est un multiple de 8

Exercice04 : Soit $n\in\mathbb{N}$ on pose : $a=10^{2n+3}-10^{2n+1}$; $b=3\times10^{n+1}+4\times10^n$

1)montrer que : a est un multiple de 11 et que b un multiple de 17

2)décomposer en produit de facteurs premiers Les nombres a et b

3)en déduire $a\wedge b$ et $a\vee b$

Solution :1)

$a=10^{2n+3}-10^{2n+1}=10^{2n}\times10^3-10^{2n}\times10^1=10^{2n}\times(10^3-10)$

$a=10^{2n}\times(990)=10^{2n}\times99\times10=3\times33\times10^{2n}\times10k$

$a=3^2\times11\times10^{2n}\times10=3^2\times11\times10^{2n+1}=11\times k$ Avec $k=3^2\times10^{2n+1}$

Donc a est un multiple de 11

On a : $b=3\times10^{n+1}+4\times10^n=3\times10^n\times10^1+4\times10^n$

$b=3\times10^n\times10^1+4\times10^n=10^n(30+4)=10^n\times34=10^n\times2\times17$

$b=17\times2\times10^n=17\times k$ avec $k=2\times10^n$

Donc b un multiple de 17

2) Décomposition en produit de facteurs premiers Les nombres a et b

On a trouvé que : $a=3^2\times11\times10^{2n+1}$

Donc : $a=3^2\times11\times(2\times5)^{2n+1}$

Donc : $a=2^{2n+1}\times3^2\times5^{2n+1}\times11$

Et c'est la bonne décomposition en produit de facteurs premiers de a

On a trouvé : $b=17\times2\times10^n$

Donc : $b=17\times2\times10^n=17\times2\times(2\times5)^n$

Donc : $b=17\times2\times2^n\times5^n$

$b=2^{n+1}\times5^n\times17$

et c'est la bonne décomposition en produit de facteurs premiers de a

3)en déduction de : $a\wedge b$ et $a\vee b$

On a : $a=2^{2n+1}\times3^2\times5^{2n+1}\times11$ et $b=2^{n+1}\times5^n\times17$

On sait que : Le PGCD est le produit des facteurs communs munis du plus petit des exposants trouvés dans la décomposition de a et b

Donc : $a\wedge b=2^{2n+1}\times5^n$

On sait que : Le PPCM est le produit des facteurs communs munis du plus grand des exposants trouvés dans la décomposition de a et b

Donc :

$a\vee b=2^{2n+1}\times3^2\times5^{2n+1}\times17\times11=2^{2n+1}\times5^{2n+1}\times693$

Exercice05

Déterminer le chiffre x pour que le nombre : $95x2x31x$ Soit divisible par 3 et un nombre impair

(Déterminer tous les nombres possibles)

Solutions : on a $0\le x\le9$

Le nombre : $95x2x31x$ est impair donc : $x\in\{1;3;5;7;9\}$

Le nombre : $95x2x31x$ est divisible par 3 ssi :
$9+5+x+2+x+3+1+x=3k$ cad un multiple de 3
Donc : $20+3x=3k$
Donc : en donnant a x les valeurs $\{1;3;5;7;9\}$ on trouve que $x=5$ donc le nombre est : 95525315

Exercice06

Est-ce que les nombres suivants sont premiers ? Justifier votre réponse ?
1 ; 1075 ; 1061; 801020103 ; 2017 ;2021

Solution : 1)
1)1 n'est pas premier car il n'a qu'un seul diviseur : 1
2)1075 n'est pas premier car 7 divise 1075
3) Est ce que 1061 est premier ? on utilise une technique :
On cherche les les nombres premiers p qui vérifient :
$p^2 \leq 1061$
Les nombres sont : 2 ;3 ;5 ;7 ;11 ;13;17 ;19 ;23 ;29 ;31
Car : $31^2=961$ et $37^2=1396$
et aucun ne divise 1061 Donc 1061 est premier
4) 667 n'est pas premier car 23 divise 667 ($667=23\times29$)
5) 801020103 n'est pas premier car la somme des chiffres est un multiple de 3 donc 3 divise 801020103
5) Est ce que 2019 est premier ? on utilise une technique :
On cherche les les nombres premiers p qui vérifient :
$p^2 \leq 2019$
Les nombres sont : 2 ;3 ;5 ;7 ;11 ;13;17 ;19 ;23 ;29 ;31 ;37 ;41 ;43 Car : $43^2=1849$ et $47^2=2209$
et aucun ne divise 2017 Donc 2017 est premier
4) 2021 n'est pas premier car 43 divise 2021

Exercice07 :

Une société veut fixer des bars pour l'éclairage publique sur le périmètre d'une surface rectangulaire de longueur 320m
Et de largeur 240m tel que une bar dans chaque coin
Du rectangle et la distance ente deux bars successives est constante et un nombre entier
1)Quelle est la plus grande distance qui peut séparer deux bars Successives
2) Quelle est donc le nombre de bars qu'il faut fixer
3) Quelle est les distances supérieures à possible entre Deux bars Successives ? calculer dans chaque cas possible le nombre de bars qu'il faut fixer

Solution :*1)on calcul* $PGCD(240;320)$
$320=2^6\times5$ et $240=2^4\times3\times5$
$240\wedge320=PGCD(240;320)=80$
Donc la plus grande distance qui peut séparer deux bars Successives est 80
2) le périmètre est : $(240+320)\times2=1120m$
Donc : le nombre de bars qu'il faut fixer dans ce cas est :
$1120m\div80=14m$
3)les diviseurs communs de : 240 et 320 sont :
1 ;2 ;4 ;5 ;7 ;8 ;10 ;16 ;20 ;30 ;40
Les distances supérieures à 15m possible entre Deux bars Successives sont :16 ;20 ;30 ;40 ;80
Pour 16m le nombre de bars qu'il faut fixer est
$1120m\div16=70m$
Pour 20m le nombre de bars qu'il faut fixer est
$1120m\div20=56m$
Pour 40m le nombre de bars qu'il faut fixer est
$1120m\div40=28m$
Pour 80m le nombre de bars qu'il faut fixer est
$1120m\div80=14m$

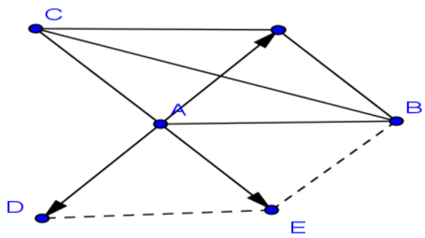
Exercice08 : ABC un triangle et E et F deux points tel que : $\overrightarrow{BE}=3\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}$ et $4\overrightarrow{AF}=2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$
Montrer que : $\overrightarrow{AE}=8\overrightarrow{AF}$ et que peut-on déduire ?

Solution :

1) On a $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}$ (relation de Chasles)
Et on a : $\overrightarrow{BE}=3\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}$
Donc :
$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}=4\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}=2\left(2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$
Et on a $4\overrightarrow{AF}=2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$
Donc : $\overrightarrow{AE}=2\times4\overrightarrow{AF}=8\overrightarrow{AF}$
Donc : $\overrightarrow{AE}=8\overrightarrow{AF}$
Donc les points A et E et F sont alignés ou les vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AF}$ sont colinéaires

Exercice09 : A et B et C trois points non alignés
1) Construire le point D Tel que : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=\vec{0}$
2) Construire le point E Tel que : $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$
3) Montrer que A est le milieu de $[CE]$

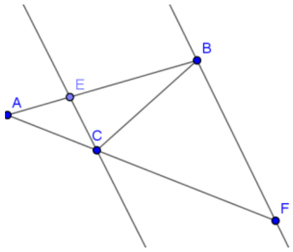
Solution :*1)* $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=\vec{0}$
Donc: $\overrightarrow{AD}=-\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$
On utilise la règle du parallélogramme pour construire $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ et son opposé



2) On utilise la règle du parallélogramme pour construire le point E Tel que : $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$
3) Pour montrer que A est le milieu de $[CE]$
On montre que: $\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AC}=\vec{0}$!!!!!
$\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AC}=\vec{0}$
Donc A est le milieu de $[CE]$

Exercice10 : ABC un triangle et E et F deux points tel que : $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AF}=3\overrightarrow{AC}$
1) Faite une figure
2) Ecrire les vecteurs : $\overrightarrow{EC}$ et $\overrightarrow{BF}$ en fonction de : $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$
3) Montrer que $\overrightarrow{EC}$ et $\overrightarrow{BF}$ sont colinéaires

4) Que peut-on déduire des droites (BF) et (EC)?



***Solution :**1)*

2) *on a* $\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AC}$ (relation de Chasle)

Donc : $\overrightarrow{EC}=-\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AC}$ Donc : $\overrightarrow{EC}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$

On a : $\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AF}$ (relation de Chasle)

Donc : $\overrightarrow{BF}=-\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}$

3) On a : $\overrightarrow{EC}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ donc $\overrightarrow{EC}=\frac{1}{3}\left(-\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}\right)$

Donc : $\overrightarrow{EC}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BF}$

Donc : $\overrightarrow{EC}$ et $\overrightarrow{BF}$ sont colinéaires

4) on a : $\overrightarrow{EC}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BF}$

Donc : les droites (BF) et (EC) sont parallèles

Exercice11 : $ABCD$ est un parallélogramme

E et F deux points tels que : $\overrightarrow{DE}=\frac{5}{2}\overrightarrow{DA}$ et $\overrightarrow{CF}=\frac{2}{3}\overrightarrow{DC}$

1) Montrer que $\overrightarrow{BE}=\frac{3}{2}\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BF}=\frac{2}{3}\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BC}$

2) Montrer que $2\overrightarrow{BE}+3\overrightarrow{BF}=\vec{0}$

3) Que peut-on déduire des points E et F et B ?

***Solution :**1)a)*

On a $\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}$ (relation de Chasle)

et puisque $ABCD$ est un parallélogramme

Alors : $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BA}$

et on a : $\overrightarrow{DE}=\frac{5}{2}\overrightarrow{DA}$

Donc : $\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BA}+\frac{5}{2}\overrightarrow{DA}=-\overrightarrow{DA}+\frac{5}{2}\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{BA}=\frac{3}{2}\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{AB}$

b) *On a* $\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CF}$ (relation de Chasle)

Donc : $\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{BC}+\frac{2}{3}\overrightarrow{DC}$

2) $2\overrightarrow{BE}+3\overrightarrow{BF}=2\left(\frac{3}{2}\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{AB}\right)+3\left(\overrightarrow{BC}+\frac{2}{3}\overrightarrow{DC}\right)$

$=3\overrightarrow{DA}-2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{BC}+2\overrightarrow{DC}$

Et puisque $ABCD$ est un parallélogramme

Alors : $\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{DA}$ et $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}$

Donc : $2\overrightarrow{BE}+3\overrightarrow{BF}=3\overrightarrow{CB}-2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{BC}+2\overrightarrow{AB}=\vec{0}$

3) déduction : on a $2\overrightarrow{BE}+3\overrightarrow{BF}=\vec{0}$ donc $\overrightarrow{BE}=-\frac{3}{2}\overrightarrow{BF}$

Donc les points E ; F et B sont alignés

Exercice12 : $ABCD$ est un parallélogramme

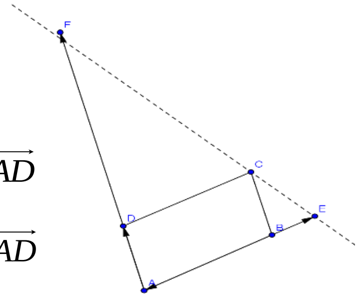
E et F deux points tels que : $\overrightarrow{BE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AF}=4\overrightarrow{AD}$

1)Faire une figure

2) Montrer que $\overrightarrow{EF}=4\overrightarrow{EC}$

3) Que peut-on déduire des points E et F et C ?

***Solution :**1)*



On a $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AF}$

(Relation de Chasle)

Donc : $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EB}+3\overrightarrow{EB}+4\overrightarrow{AD}$

Car : $\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{AF}=4\overrightarrow{AD}$

Donc : $\overrightarrow{EF}=4\overrightarrow{EB}+4\overrightarrow{BC}$ car

$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$

Donc : $\overrightarrow{EF}=4\left(\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{BC}\right)$

Donc : $\overrightarrow{EF}=4\overrightarrow{EC}$

Donc : $\overrightarrow{EC}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont colinéaires

Donc les points E ; F et C sont alignés

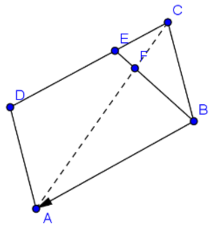
Exercice13 : $ABCD$ est un parallélogramme

E et F deux points tels que : $\overrightarrow{CE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{BF}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BE}$

1) Faire une figure

2) Montrer que les points A et F et C sont alignés

***Solution :**1)*



2) *On a* $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{BE}$ (relation de Chasle)

Donc : $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CE}\right)=\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{BC}+\frac{3}{4}\overrightarrow{CE}$

Donc : $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{4}\overrightarrow{CD}$

Donc $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{BC}+\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}\overrightarrow{CD}$

Donc $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{4}\overrightarrow{BA}$ car $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BA}$

Donc : $\overrightarrow{AF}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{BC}=\frac{3}{4}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right)$

Donc : $\overrightarrow{AF}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$

Donc : $\overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires

Donc les points A ; F et C sont alignés

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices

Que l'on devient un mathématicien