Exercices avec corrections sur les Systèmes partie2

Types d'exercices :

Application directe du cours (*) Difficulté moyenne (**) Demande une réflexion (***)

Exercice1 : (*) Résoudre le système dans $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} 3x+y=5 \\ 2x-3y=-4 \end{cases}$$

Par les 4 Méthodes suivantes :
1) Par la Méthode de substitution
2) Par la méthode des combinaisons linéaires
3) Méthode graphique
4) Méthode des déterminants

Solution: 1) Par la *Méthode de substitution :*

$3x+y=5$ Signifie que : $y=5-3x$

On obtient alors le système : $\begin{cases} y=5-3x \\ 2x-3y=-4 \end{cases}$

On va maintenant remplacer le y de la seconde équation par son expression en fonction de x qu'on vient de trouver. Cela donne alors :

$$\begin{cases} y=5-3x \\ 2x-3(5-3x)=-4 \end{cases}$$

On développe et on simplifie l'écriture de la deuxième équation : $\begin{cases} y=5-3x \\ 11x=11 \end{cases}$

On résout maintenant l'équation du premier degré pour trouver la valeur de x : $\begin{cases} y=5-3x \\ x=1 \end{cases}$

Maintenant qu'on connaît la valeur de x, il ne nous reste plus qu'à remplacer x par sa valeur dans la première équation. $\begin{cases} y=5-3\times1=2 \\ x=1 \end{cases}$ donc: $\begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$

La solution de notre système est donc :

$S=\{(1,2)\}$

Il peut être utile de procéder à une vérification. Pour cela, on remplace les inconnues par les valeurs qu'on vient de trouver dans chacune des équations et on vérifie si on retrouve bien l'égalité

$$\begin{cases} 3\times1+2=3+2=5\checkmark \\ 2\times1-3\times2=2-6=-4\checkmark \end{cases}$$

2) Par la méthode combinaison linéaire ou méthode par addition.

Le but de cette méthode est de multiplier les équations par des nombres judicieusement choisis pour qu'en additionnant ou soustrayant les équations on n'ait plus qu'une seule inconnue.
On va chercher, par exemple, à "éliminer" l'inconnue x. Pour cela on va :
multiplier la première équation par 2 qui est le coefficient de l'inconnue de la seconde équation.
Multiplier la seconde équation par 3 qui est le coefficient de l'inconnue de la première équation.

On obtient alors le système : $\begin{cases} 6x+2y=10 \\ 6x-9y=-12 \end{cases}$

On va maintenant soustraire nos deux équations pour ainsi ne plus avoir de termes en x .

$$\begin{array}{rrcrl} & 6x & + & 2y & =10 \\ -(& 6x & - & 9y & =-12) \\ \hline & & & 11y & =22 \\ & \text{donc} & & y & =2 \end{array}$$

On remplace maintenant cette valeur dans l'une des deux équations :
Si on choisit la première équation
$3x+2=5$ soit $3x=3$ et donc $x=1$.

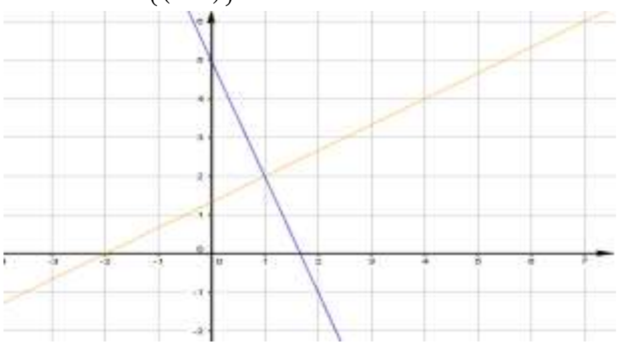
La solution du système est donc : $S=\{(1,2)\}$

3) Méthode graphique : Résoudre graphiquement

Le système $\begin{cases} 3x+y=5 \\ 2x-3y=-4 \end{cases}$

Les équations du type $ax+by=c$ correspond en fait à des équations de droite.
La solution du système correspond aux coordonnées, dans un repère du point d'intersection des deux droites.
On a tracé les deux droites associées au système
On lit les coordonnées du point d'intersection $(1,2)$

Donc $S=\{(1,2)\}$



On distingue alors trois cas dans la résolution des systèmes graphiquement :

• Si les droites sont parallèles et distinctes, le système (S) n'admet aucun couple solution.

• Si les droites sont sécantes, le système (S) admet une solution unique.

• Si les droites sont confondues, alors le système (S) admet une infinité de couples solutions.

4) Méthode des déterminants : On calcule le déterminant du système suivant $(I)\begin{cases}2x+3y=7\\3x-2y=4\end{cases}$

$$\Delta=\begin{vmatrix}2 & 3\\3 & -2\end{vmatrix}=2\times(-2)-3\times3=-13\neq0$$

Alors le système (I) admet un couple solution unique :

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix}7 & 3\\4 & -2\end{vmatrix}}{-13}=\frac{-26}{-13}=2 \quad \text{et} \quad y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix}2 & 7\\3 & 4\end{vmatrix}}{-13}=\frac{-13}{-13}=1$$

Donc : $S=\{(1,2)\}$

Exercice2 : (**) Un cirque propose deux tarifs d'entrée : un pour les adultes et un pour les enfants.
Un groupe de trois enfants avec un adulte paie 290 DH.
On peut traduire ces données par l'équation à deux inconnues : 3x + y = 290
Un autre groupe de 5 enfants avec quatre adultes paie 705 DH.
1. Ecrire alors une deuxième équation et résoudre le système obtenu de deux équations à deux inconnues.
Donner le prix d'une entrée pour un enfant et celui d'une entrée pour un adulte.

Solution:1) Si "un groupe de trois enfants avec un adulte paie 290 DH " s'écrit 3x + y = 290, c'est que x, représente le tarif d'entrée pour les enfants et y le tarif d'entrée pour les adultes.
"Un autre groupe de 5 enfants avec quatre adultes paie 705 DH " s'écrira
Donc : 5x + 4y = 705
Et on obtient le système suivant à résoudre pour déterminer la valeur de x et y : $\begin{cases}3x+1y=290\\5x+4y=705\end{cases}$

Résolution du système : on résoud le système par substitution : $\begin{cases}y=290-3x\\5x+4(290-3x)=705\end{cases}$

Équivaut à : $\begin{cases}y=290-3x\\5x+1160-12x=705\end{cases}$

Équivaut à $\begin{cases}y=290-3x\\-7x=-455\end{cases}$ donc : $\begin{cases}x=65\\y=95\end{cases}$

2) Le tarif enfant est de 65 DH et le tarif adulte est de 95 DH.

Exercice3 : (**)1) Résoudre le système suivant :
$\begin{cases}x+y=630\\18x+30y=14220\end{cases}$

2) Dans un parc zoologique, la visite coûte 30 DH pour les adultes et 18 DH pour les enfants.
A la fin d'une journée, on sait que 630 personnes ont visité le zoo et que la recette du jour est de 14220 DH. Parmi les personnes qui ont visité le zoo ce jour-là, quel est le nombre d'enfants ? Quel est le nombre d'adultes ?

Solution :1) Résolution du système :
$\begin{cases}x+y=630\\18x+30y=14220\end{cases}$ Utilisons la méthode par substitution :

$\begin{cases}x+y=630\\18x+30y=14220\end{cases}$ Équivaut à : $\begin{cases}x=630-y\\18x+30y=14220\end{cases}$

Équivaut à : $\begin{cases}x=630-y\\18(630-y)+30y=14220\end{cases}$

Équivaut à : $\begin{cases}x=630-y\\11340-18y+30y=14220\end{cases}$

Équivaut à : $\begin{cases}x=630-y\\12y=2880\end{cases}$ c'est à dire : $\begin{cases}x=390\\y=240\end{cases}$

2) Soit x le nombre d'enfants qui ont visité le zoo et y le nombre d'adultes.
On sait que 630 personnes ont visité le zoo : cette donnée s'écrit : x + y = 630
La visite coûte 30 F pour les adultes et 18 F pour les enfants. La recette du jour est de 14 220 F.
Ces données s'écrivent :18x + 30y = 14220
On retrouve les deux équations de la question précédente.
Par conséquent, 390 enfants et 240 adultes ont visité le zoo.

Exercice4 : (**) 21 livres sont empilés les uns sur les autres ; la hauteur de la pile atteint 81 cm .
Certains de ces livres ont une épaisseur de 5cm ; les autres une épaisseur de 3cm .
Trouver le nombre de livre de chaque sorte.

Solution: Nous désignons par « x » le nombre de livres de 5 cm d'épaisseur ; par « y » le nombre de livres de 3 cm d'épaisseur.
Le nombre total de livres est de 21.
Donc x + y = 21

Les livres de 5 cm d'épaisseur ont, en centimètres, une épaisseur totale 5x ; les livres de 3 cm d'épaisseur ont en centimètres, une épaisseur totale 3y. La hauteur totale de la pile est de 81 cm.
Donc : 5x +3y = 81
Les nombres «x » et « y » satisfont donc au système formé par les équations : $\begin{cases} x+y=21 \\ 5x+3y=81 \end{cases}$
Réciproquement, toute solution de ce système est une solution du problème pourvu que « x » et « y » soient tous deux entiers et positifs.
Résolvons ce système : pourvu que « x » et « y » soient tous deux entiers et positifs.
Résolvons ce système : $\begin{cases} x+y=21 \\ 5x+3y=81 \end{cases}$
On multiplie la première équation par -3
Ce qui donne : $\begin{cases} -3x-3y=-63 \\ 5x+3y=81 \end{cases}$
On additionne les deux membres terme à terme :(5x + – 3x) + (3y + – 3 y) = 81 + (- 63)
Donc : 2x + 0 = 18 soit x = 9
De l'équation x + y = 21 ; 9 + y = 21 ; y = 12
Conclusion : il y a donc 9 livres de 5 cm et 12 livres de 3 cm, et 12 livres de 3 cm.
Vérification :
12 + 9 = 21 et 5cm fois 9 + 3 fois 12 = 81 cm

Exercice5 : (**) Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes suivants : 1) $\begin{cases} 3x-y=5 \\ 2x+4y=-6 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 8x+4y=4 \\ 2x+y=3 \end{cases}$

3) $\begin{cases} \sqrt{2}x-y=\sqrt{2} \\ 2x-\sqrt{2}y=2 \end{cases}$ 4) $(I)\begin{cases} 4x+2y=-2 \\ x-3y=-11 \\ 2x+4y=8 \end{cases}$

5) $(I)\begin{cases} x-2y=1 \\ 3x+y=2 \\ x-y=3 \end{cases}$

Solution :1) Le déterminant est :
$\Delta=\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}=3\times4-(-1)\times2=14\neq0$
Alors le système (I) admet un couple solution unique : $x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ -6 & 4 \end{vmatrix}}{14}=\frac{5\times4-(-6)\times(-1)}{14}=\frac{20-6}{14}=\frac{14}{14}=1$

$y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & -6 \end{vmatrix}}{14}=\frac{3\times(-6)-5\times2}{14}=\frac{-18-10}{14}=\frac{-28}{14}=-2$
On en déduit le couple solution : $S=\{(1,-2)\}$.

2) Le déterminant est : $\Delta=\begin{vmatrix} 8 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=8-8=0$
Alors on calcule $\Delta_x=\begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}=4-12=-8\neq0$
Donc $S=\varnothing$

3) $\begin{cases} \sqrt{2}x-y=\sqrt{2} \\ 2x-\sqrt{2}y=2 \end{cases}$
Le déterminant est : $\Delta=\begin{vmatrix} \sqrt{2} & -1 \\ 2 & -\sqrt{2} \end{vmatrix}=-2+2=0$
Alors on calcule $\Delta_x=\begin{vmatrix} \sqrt{2} & -1 \\ 2 & -\sqrt{2} \end{vmatrix}=-2+2=0$
Alors on calcule $\Delta_y=\begin{vmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 2 & 2 \end{vmatrix}=2\sqrt{2}-2\sqrt{2}=0$
Donc les deux équations $\sqrt{2}x-y=\sqrt{2}$ et $2x-\sqrt{2}y=2$ sont équivalentes et dans ce cas résoudre le système c'est résoudre l'une des équations par exemple en choisi $\sqrt{2}x-y=\sqrt{2}$
C'est-à-dire : $\sqrt{2}x-\sqrt{2}=y$ et alors on a :
$S=\{(x;\sqrt{2}x-\sqrt{2})/x\in\mathbb{R}\}$

4) $(I)\begin{cases} 4x+2y=-2 \\ x-3y=-11 \\ 2x+4y=8 \end{cases}$
Soit le système $(I')\begin{cases} 4x+2y=-2 \\ x-3y=-11 \end{cases}$
Le déterminant est : $\Delta=\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}=-12-2=-14\neq0$
Alors le système (I') admet une solution unique
$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -11 & -3 \end{vmatrix}}{-14}=\frac{28}{-14}=-2$; $y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 1 & -11 \end{vmatrix}}{-14}=\frac{-42}{-14}=3$
Donc $(-2,3)$ est une solution du système (I')
On remplace dans la dernière équation
C'est-à-dire : $2x+4y=8$
On a $2\times(-2)+4\times3=-4+12=8$

Donc $(-2,3)$ vérifie toutes les équations et par suite:

$S=\{(-2,3)\}$

5) $(I)\begin{cases}x-2y=1\\3x+y=2\\x-y=3\end{cases}$

Soit le système $(I')\begin{cases}x-2y=1\\x-y=3\end{cases}$

Le déterminant est : $\Delta=\begin{vmatrix}1&-2\\1&-1\end{vmatrix}=-1+2=1\neq0$

Alors le système (I') admet une solution unique :

$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix}1&-2\\3&-1\end{vmatrix}}{1}=\frac{5}{1}=5$ et $y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix}1&1\\1&3\end{vmatrix}}{1}=\frac{2}{1}=2$

Donc $(5,2)$ est une solution du système (I')

On remplace dans la deuxième équation $3x+y=2$

On a $3\times5+2=17\neq2$

Donc $(5,2)$ ne vérifie pas toutes les équations

Et par suite : $S=\varnothing$

Exercice6 : (***) L'association des enfants heureux organise une course.
Chaque enfant à un vélo ou un tricycle.
L'organisateur a compté 64 enfants et 151 roues.
1) Combien de vélos et combien de tricycles sont engagés dans cette course ?
2) Chaque vélo engagé rapporte 500 DH et chaque tricycle 400 DH. Calculer la somme que l'association des enfants heureux recevra.

Solution:1) Première étape : on identifie ce que nos inconnues vont représenter.
On cherche le nombre de vélos et le nombre de tricycle engagés.
On va donc appeler V le nombre de vélos et T le nombre de tricycles.
Deuxième étape : on met en équation le problème donné : On a 64 enfants
Cela signifie donc que $V+T=64$.
On a compté 151 roues. Chaque vélo possède 2 roues et chaque tricycle possède 3 roues.
On a donc l'équation : $2V+3T=151$.
Troisième étape : On résout le système :

$\begin{cases}V+T=64\\2V+3T=151\end{cases}$

A l'aide de la méthode par substitution.

$\begin{cases}V=64-T\\2V+3T=151\end{cases}$ $\begin{cases}V=64-T\\2(64-T)+3T=151\end{cases}$

$\begin{cases}V=64-T\\128-2T+3T=151\end{cases}$ $\begin{cases}V=64-T\\T=23\end{cases}$

$\begin{cases}T=23\\V=64-23\end{cases}$ $\begin{cases}T=23\\V=41\end{cases}$

On vérifie que le couple $(41,23)$ est bien solution du système.

$\begin{cases}41+23=64\checkmark\\2\times41+3\times23=82+69=151\checkmark\end{cases}$

A l'aide de la méthode par combinaisons linéaires

$\begin{cases}V+T=64 & (\times2)\\2V+3T=151 & (\times1)\end{cases}$

$$\begin{array}{rrcrl} & 2V & + & 2T & =128\\ -(& 2V & + & 3T & =151)\\ \hline & & & -T & =-23\\ & & \text{donc} & T & =23\end{array}$$

On reporte cette valeur dans la première équation : $V+23=64$ donc : $V=64-23$ et finalement $V=41$.
On contrôle que les valeurs trouvées vérifient la seconde équation : $2\times41+3\times23=82+69=151\checkmark$.
Conclusion : 41 vélos et 23 tricycles étaient engagés dans cette course.
2). On utilise ces valeurs pour répondre à la question posée :$41\times500+23\times400=29\ 700$
L'association recevra donc $29\ 700$ DH grâce à cette course.

Exercice7: (**)1) On considère le système suivant :

$\begin{cases}45x+30y=510\\27x+20y=316\end{cases}$

a. Les nombres $x=10$ et $y=2$ sont-ils solutions de ce système ?
b. Résoudre le système.
2. Pour les fêtes de fin d'année, un groupe d'amis souhaite emmener leurs enfants assister à un spectacle.
Les tarifs sont les suivants :
- 45 dh par adulte et 30 par enfant s'ils réservent en catégorie 1.
- 27 dh par adulte et 20 dh par enfant s'ils réservent en catégorie 2.

Le coût total pour ce groupe d'amis est de 510 dh s'ils réservent en catégorie 1 et 316 dh s'ils réservent en catégorie 2.
Déterminer le nombre d'adultes et d'enfants de ce groupe?

Solution:1). a. Regardons si les nombres $x=10$ Et $y=2$ vérifient chacune des deux équations

$45\times10+30\times2=450+60=510✓$
$27\times10+20\times2=270+40=310\neq316$

Le couple $(10,2)$ n'est donc pas solution du système.

b. Nous allons résoudre ce système à l'aide de combinaisons linéaires :

$$\begin{cases}45x+30y=510 & (\times20)\\27x+20y=316 & (\times30)\end{cases}$$

$$\begin{array}{rcrl} 900x & + & 600y & =10\,200\\ -(\ 810x & + & 600y & =9\,480)\\ \hline 90x & & & =720\\ \text{donc} & & x & =8\end{array}$$

On reporte ce résultat dans la première équation : $45\times8+30y=510$ soit $360+30y=510$

Donc : $30y=150$ d'où : $y=5$.

On vérifie que le couple $(8,5)$ est bien solution de la seconde équation : $27\times8+20\times5=216+100=316✓$.

Par conséquent la solution du système est : $(8,5)$

Par suite : $S=\{(8,5)\}$

2. On appelle A le nombre d'adultes et E le nombre d'enfants.

Avec la première catégorie on obtient l'équation $45A+30E=510$.

Avec la seconde catégorie on obtient l'équation $27A+20E=316$.

On est donc ramené à résoudre le système :

$$\begin{cases}45A+30E=510\\27A+20E=316\end{cases}$$

D'après la question précédente le couple $(8,5)$ est solution de ce système.

Exercice8 : (**) Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes suivants :1) $\begin{cases}x-2y=1\\-2x+4y=-2\end{cases}$ 2) $\begin{cases}3x-4y=2\\-x+\frac{4}{3}y=-\frac{1}{3}\end{cases}$

3) $\begin{cases}\left(\sqrt5-\sqrt3\right)x+\left(\sqrt2-1\right)y=0\\\left(\sqrt2+1\right)x+\left(\sqrt5+\sqrt3\right)y=1\end{cases}$ 4) $\begin{cases}x+y=11\\x^2-y^2=44\end{cases}$

Solution:1) $\Delta=\begin{vmatrix}1&-2\\-2&4\end{vmatrix}=0$

$$\begin{cases}x-2y=1\\-2x+4y=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-2y=1\\-2(x-2y)=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-2y=1\\x-2y=1\end{cases}$$

$\Leftrightarrow x-2y=1\Leftrightarrow -2y=1-x\Leftrightarrow y=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}x$

Donc le système admet une infinité de solutions :

$S=\left\{\left(x;\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\right)/x\in\mathbb{R}\right\}$

2) $\begin{cases}3x-4y=2\\-x+\frac{4}{3}y=-\frac{1}{3}\end{cases}$

On multiplie les 2 ième équations par -3

On aura : $\begin{cases}3x-4y=2\\3x-4y=1\end{cases}$

Donc : 2=1 Impossible donc : $S=\varnothing$

3) $\begin{cases}\left(\sqrt5-\sqrt3\right)x+\left(\sqrt2-1\right)y=0\\\left(\sqrt2+1\right)x+\left(\sqrt5+\sqrt3\right)y=1\end{cases}$

$\Delta=\begin{vmatrix}\sqrt5-\sqrt3&\sqrt2-1\\\sqrt2+1&\sqrt5+\sqrt3\end{vmatrix}=\left(\sqrt5-\sqrt3\right)\left(\sqrt5+\sqrt3\right)-\left(\sqrt2+1\right)\left(\sqrt2-1\right)$

$\Delta=\left(\left(\sqrt5\right)^2-\left(\sqrt3\right)^2\right)-\left(\left(\sqrt2\right)^2-(1)^2\right)$

Donc : $\Delta=(5-3)-(2-1)=1\neq0$

$x=\frac{\begin{vmatrix}0&\sqrt2-1\\1&\sqrt5+\sqrt3\end{vmatrix}}{\Delta}=\frac{-\left(\sqrt2-1\right)}{1}=-\sqrt2+1=1-\sqrt2$

$y=\frac{\begin{vmatrix}\sqrt5-\sqrt3&0\\\sqrt2+1&1\end{vmatrix}}{\Delta}=\frac{-\left(\sqrt5-\sqrt3\right)}{1}=-\sqrt5+\sqrt3=\sqrt3-\sqrt5$

Donc **:** $S=\left\{\left(1-\sqrt2,\sqrt3-\sqrt5\right)\right\}$

4) $\begin{cases}x+y=11\\x^2-y^2=44\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=11\\(x+y)(x-y)=44\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=11\\11(x-y)=44\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=11\\x-y=4\end{cases}$

On fait la somme membre a membre on trouve : $x+y+x-y=11+4$ c'est-à-dire : $2x=15$

Donc : $x=\frac{15}{2}$ et par suite : $\frac{15}{2}+y=11$

Donc : $y=\frac{7}{2}$ Alors on a : $S=\left\{\left(\frac{15}{2},\frac{7}{2}\right)\right\}$

Exercice9 : (**) **1)** résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système suivant : $\begin{cases} -7x-3y=4 \\ 4x+5y=-2 \end{cases}$

2) en déduire les solutions du système suivant :

$$\begin{cases} \frac{-7}{x}-\frac{3}{y}=4 \\ \frac{4}{x}+\frac{5}{y}=-2 \end{cases}$$

Solution: 1) Le déterminant du système est :

$\Delta = \begin{vmatrix} -7 & -3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -35+12=-23\neq 0$

Donc : $x = \frac{\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 5 \end{vmatrix}}{\Delta} = -\frac{14}{23}$ **et** $y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix} -7 & 4 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}}{-23}=\frac{2}{23}$

Donc : $S=\left\{\left(-\frac{14}{23},\frac{2}{23}\right)\right\}$

2) Pour que le système existe il faut que : $x\neq 0$ et $y\neq 0$

$\begin{cases} -7\frac{1}{x}-3\frac{1}{y}=4 \\ 4\frac{1}{x}+5\frac{1}{y}=-2 \end{cases}$ On pose : $X=\frac{1}{x}$ et $Y=\frac{1}{y}$

Le système devient : $\begin{cases} -7X-3Y=4 \\ 4X+5Y=-2 \end{cases}$

D'après 1) on a : $X=-\frac{14}{23}$ et $Y=-\frac{2}{23}$

Donc : $\frac{1}{x}=-\frac{14}{23}$ et $\frac{1}{y}=\frac{2}{23}$

Donc : $x=-\frac{23}{14}$ et $y=\frac{23}{2}$

Par suite : $S=\left\{\left(-\frac{23}{14},\frac{23}{2}\right)\right\}$

Exercice10 :(**) Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système suivant : $\begin{cases} \frac{5}{x-1}+\frac{3}{y-2}=4 \\ \frac{-2}{x-1}+\frac{1}{y-2}=1 \end{cases}$

Solution: Pour que le système existe il faut que : $x\neq 1$ et $y\neq 1$ on pose : $X=\frac{1}{x-1}$ et $Y=\frac{1}{y-2}$

Le système devient : $\begin{cases} 5X+3Y=4 \\ -2X+Y=1 \end{cases}$

On résolve ce système et on trouve :

$X=\frac{1}{11}$ et $Y=\frac{13}{11}$ Donc : $\frac{1}{x-1}=\frac{1}{11}$ et: $\frac{1}{y-2}=\frac{13}{11}$

C'est-à-dire : $x-1=11$ et $y-2=\frac{11}{13}$

Donc : $x=12$ et $y=\frac{37}{13}$ par suite : $S=\left\{\left(12,\frac{37}{13}\right)\right\}$

Exercice11 : (**) 1) Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système suivant : $\begin{cases} 3\sqrt{x}-\sqrt{y}=2 \\ 2\sqrt{x}+5\sqrt{y}=24 \end{cases}$

Solution:

$\begin{cases} 3\sqrt{x}-\sqrt{y}=2 \\ 2\sqrt{x}+5\sqrt{y}=24 \end{cases}$ On pose: $\begin{cases} X=\sqrt{x} \\ Y=\sqrt{y} \end{cases}$

Donc on a: $\begin{cases} 3X-Y=2 \\ 2X+5Y=24 \end{cases}$

le déterminant du système est :

$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 15+2=17\neq 0$

$X=\frac{\Delta_X}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 24 & 5 \end{vmatrix}}{17}=\frac{34}{17}=2$ et $Y=\frac{\Delta_Y}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 24 \end{vmatrix}}{17}=\frac{68}{17}=4$

Donc: $X=2$ et $Y=4$

Donc : $\sqrt{x}=2$ et $\sqrt{y}=4$

Donc : $\left(\sqrt{x}\right)^2=2^2$ et $\left(\sqrt{y}\right)^2=4^2$

C'est-à-dire : $x=4$ et $y=16$ Par suite : $S=\{(4,16)\}$

Exercice12 : (**) Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système suivant : $\begin{cases} 2x^2-5y^2=1 \\ 4x^2+3y^2=15 \end{cases}$

Solution: On pose : $X=x^2$ et $Y=y^2$

Le système devient : $\begin{cases} 2X-5Y=1 \\ 4X+3Y=15 \end{cases}$

On résolve ce système et on trouve: $X=3$ et $Y=1$

Donc : $x^2=3$ et $y^2=4$

Donc : $x=-\sqrt{3}$ ou $x=\sqrt{3}$ et $y=\sqrt{1}$ ou $y=-\sqrt{1}$

Donc : $x=-\sqrt{3}$ ou $x=\sqrt{3}$ et $y=1$ ou $y=-1$

Par suite : $S=\left\{\left(\sqrt{3},1\right),\left(\sqrt{3},-1\right),\left(-\sqrt{3},1\right),\left(-\sqrt{3},-1\right)\right\}$

Exercice13 : (**) Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système suivant : $\begin{cases}(x^2-3x+1)+(y^2-5y+4)=-3\\2(x^2-3x+1)-3(y^2-5y+4)=4\end{cases}$

Solution: On pose : $X=x^2-3x+1$ et $Y=y^2-5y+4$

Le système devient : $\begin{cases}X+Y=-3\\2X-3Y=4\end{cases}$

On résolve ce système et on trouve :

$X=-1$ et $Y=-2$

Donc : $x^2-3x+1=-1$ et $y^2-5y+4=-2$

Donc : $x^2-3x+2=0$ et $y^2-5y+6=0$

On résolve l'équation : $x^2-3x+2=0$

$\Delta=b^2-4ac=(-3)^2-4\times1\times(2)=1>0$

Donc : $x_1=\frac{-(-3)+\sqrt{1}}{2\times1}=2$ **et** $x_2=\frac{-(-3)-1}{2}=1$

On résolve l'équation $y^2-5y+6=0$:

$\Delta=b^2-4ac=(-5)^2-4\times1\times6=1>0$

Donc : $y_1=\frac{-(-5)+\sqrt{1}}{2\times1}=3$ **et** $y_2=\frac{-(-5)-\sqrt{1}}{2\times1}=2$

Par suite on a : $S=\{(1,3),(1,2),(2,3),(2,2)\}$

Exercice14 : (**) Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système suivant : $\begin{cases}x-(y-1)^2=-8\\4x+3(y-1)^2=31\end{cases}$

Solution: On pose : $\begin{cases}X=x\\Y=(y-1)^2\end{cases}$

Le système devient : $\begin{cases}X-Y=-8\\4X+3Y=31\end{cases}$

Le déterminant du système est :

$\Delta=\begin{vmatrix}1&-1\\4&3\end{vmatrix}=3+4=7\neq0$

Donc : $X=\frac{\Delta_X}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix}-8&-1\\31&3\end{vmatrix}}{7}=\frac{-24+31}{7}=\frac{7}{7}=1$

Et $Y=\frac{\Delta_Y}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix}1&-8\\4&31\end{vmatrix}}{7}=\frac{31+32}{7}=\frac{63}{7}=9$

Donc : $X=1$ et $Y=9$

Donc : $x=1$ et $(y-1)^2=9$

Donc : $x=1$ et $y-1=\sqrt{9}=3$ ou $y-1=-\sqrt{9}=-3$

C'est-à-dire : $x=1$ et ($y=4$ ou $y=-2$)

Par suite : $S=\{(1,4);(1,-2)\}$

Exercice15 : (***) Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ et discuter suivant le paramètre m les systèmes suivant :

1) $\begin{cases}x+my=6\\2x+4y=5\end{cases}$ (I) 2) $\begin{cases}mx+y=1+m\\x+my=2\end{cases}$ (J)

Solution: 1) On utilise la Méthode des déterminants

On calcule le déterminant du système (I)

$\Delta=\begin{vmatrix}1&m\\2&4\end{vmatrix}=1\times4-m\times2=4-2m$

1ere cas : si $\Delta=4-2m\neq0$ c'est-à-dire : $m\neq2$

Alors le système (I) admet un couple solution unique :

$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix}6&m\\5&4\end{vmatrix}}{4-2m}=\frac{24-5m}{4-2m}$ et $x=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix}1&6\\2&5\end{vmatrix}}{4-2m}=\frac{-7}{4-2m}$

Donc : $S=\left\{\left(\frac{24-5m}{4-2m},\frac{-7}{4-2m}\right)\right\}$

2ere cas : si $\Delta=4-2m=0$ c'est-à-dire : $m=2$

Alors : on obtient le système suivant :

$\begin{cases}x+2y=6\\2x+4y=5\end{cases}$ qui est équivalent à : $\begin{cases}x+2y=6\\x+2y=\frac{5}{2}\end{cases}$

impossible Donc: $S=\varnothing$

2) On utilise la Méthode des déterminants :

$\begin{cases}mx+y=1+m\\x+my=2\end{cases}$ (J)

On calcule le déterminant du système (J) :

$\Delta=\begin{vmatrix}m&1\\1&m\end{vmatrix}=m^2-1$

1ere cas : si $\Delta=m^2-1\neq0$

C'est-à-dire : $m\neq1$ et $m\neq-1$

Alors le système (J) admet un couple solution unique: $x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix}1+m&1\\2&m\end{vmatrix}}{m^2-1}=\frac{m(1+m)-2}{m^2-1}=\frac{m^2+m-2}{m^2-1}$

$x=\frac{(m-1)(m+2)}{(m-1)(m+1)}=\frac{m+2}{m+1}$

$$y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix} m & 1+m \\ 1 & 2 \end{vmatrix}}{m^2-1}=\frac{2m-(1+m)}{m^2-1}=\frac{m-1}{m^2-1}=\frac{(m-1)}{(m-1)(m+1)}=\frac{1}{m+1}$$

Donc : $S=\left\{\left(\frac{m+2}{m+1},\frac{1}{m+1}\right)\right\}$

2ere cas : si $\Delta=m^2-1=0$

C'est-à-dire : $m=1$ ou $m=-1$

Si $m=1$ on remplace m par 1 on trouve :

$\begin{cases} x+y=2 \\ x+y=2 \end{cases}$ qui est équivalent à : $x+y=2$

Dans ce cas Résoudre le système

C'est résoudre l'équation $x+y=2$

$x+y=2$ Est équivalent à: $y=2-x$

Alors on a : $S=\{(x;2-x)\,/\,x\in\mathbb{R}\}$

Si $m=-1$ on remplace m par -1 on trouve :

$\begin{cases} -x+y=0 \\ x-y=2 \end{cases}$ Qui est équivalent a: $\begin{cases} x-y=0 \\ x-y=2 \end{cases}$

Impossible Donc: $S=\varnothing$

Exercice16 : (***) Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système

suivant : $\begin{cases} x-2y=1 \\ 3x+y=2 \\ x-y=3 \end{cases}(I)$

Solution: On considère le système suivant :

$\begin{cases} x-2y=1 \\ x-y=3 \end{cases}(I')$ On a pour (I'):

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=-1+2=1\neq 0$$

Donc : $x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}}{1}=\frac{5}{1}=5$ et

$$y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 1 & -11 \end{vmatrix}}{-14}=\frac{-42}{-14}=3$$

Donc : $(-2,3)$ est une solution du système :

$(I')\begin{cases} x-2y=1 \\ x-y=3 \end{cases}$ Mais on remplaçant dans

l'équation $3x+y=2$ On a : $3\times 5+2=17\neq 2$

Donc : $(-2,3)$ ne vérifie pas l'équation $3x+y=2$

Par suite : $S=\varnothing$

Exercice17: (**) Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système

suivant : $\begin{cases} 2x-y=5 \\ x\times y=-2 \end{cases}$

Solution: $\begin{cases} 2x-y=5 \\ x\times y=-2 \end{cases}$ signifie que : $\begin{cases} y=2x-5 \\ x\times(2x-5)=-2 \end{cases}$

C'est-à-dire : $x\times(2x-5)=-2$

Équivalent à : $2x^2-5x+2=0$

Résolution de l'équation $2x^2-5x+2=0$:

$\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \times 2 \times 2) = 9 > 0$

Donc :

$x_1=\frac{5-\sqrt{9}}{2a}=\frac{5-3}{2\times 2}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$ et $x_2=\frac{5+\sqrt{9}}{2a}=\frac{5+3}{2\times 2}=\frac{8}{4}=2$

Si $x=2$ alors $y=2\times 2-5=-1$

Si $x=\frac{1}{2}$ alors $y=2\times\frac{1}{2}-5=-4$

Par suite : $S=\left\{(2,-1);\left(\frac{1}{2},-4\right)\right\}$.

Définition du Système : Wikipédia

Un **système** est un ensemble d'éléments interagissant entre eux selon certains principes ou règles. Un système est déterminé par :

- Sa frontière, c'est-à-dire le critère d'appartenance au système (déterminant si une entité appartient au système ou fait au contraire partie de son environnement) ;
- Sa mission (ses objectifs et sa raison d'être) ;
- Ses interactions avec son environnement ;
- Ses fonctions (qui définissent ce qu'ont le droit de faire ou non les entités faisant partie du système, leur organisation et leurs interactions) ;
- Ses ressources, qui peuvent être de natures différentes (humaine, naturelle, matérielle, immatérielle...), leur organisation et leurs interactions.