Exercice 1 : $ABCD$ un parallélogramme

I et J deux points tels que : $\overrightarrow{CI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{DC}$

1) Faite une figure.

2) Monter que la droite (BJ) est l'image de la droite (AI) par la translation $t_{\overrightarrow{AB}}$ et que peut-on en déduire pour les droites (BJ) et (AI) ?

3) Soit l'homothétie h de centre I qui transforme le point B en C.

a) Montrer que $h((AB)) = (CD)$

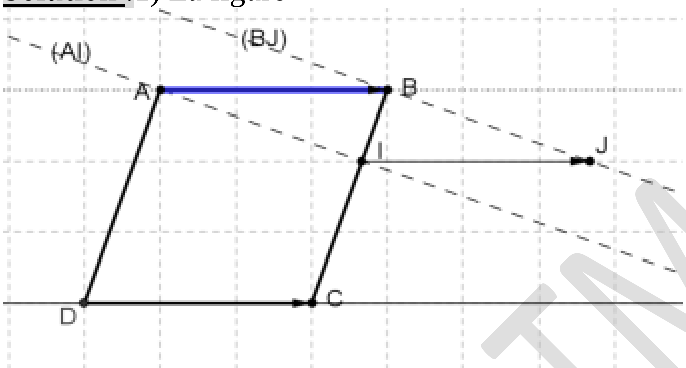
a) Montrer que le rapport k de l'homothétie est $k = -2$

4) Soit le point K tel que : $\overrightarrow{KI} = 2\overrightarrow{AB}$

a) Montrer que $h(J) = K$

b) Montrer que $AI = \frac{1}{2}CK$.

Solution :1) La figure



2) $t_{\overrightarrow{AB}}(I) = J$ ؟؟؟؟؟

On a $ABCD$ parallélogramme donc $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$

Et on a $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{DC}$ donc $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AB}$ c a d $t_{\overrightarrow{AB}}(I) = J$

On a $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}$ donc $t_{\overrightarrow{AB}}(A) = B$

On donc $\begin{cases} t_{\overrightarrow{AB}}(I) = J \\ t_{\overrightarrow{AB}}(A) = B \end{cases}$ alors $t_{\overrightarrow{AB}}((AI)) = (BJ)$

Déduction : On sait que L'image d'une droite par une translation est une droite qui lui est parallèle donc $(AI) \parallel (BJ)$

3)a) On a $h(B) = C$ et on sait que L'image d'une droite par une homothétie est une droite qui lui est parallèle et donc passe par l'image de B

C'est-à-dire : C donc $h((AB)) = (CD)$

3)b) On a $h(B) = C$ donc $\overrightarrow{IC} = k\overrightarrow{IB}$

Et on sait que : $\overrightarrow{CI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$ donc : $3\overrightarrow{CI} = 2\overrightarrow{CB}$

Donc : $3\overrightarrow{CI} = 2\left(\overrightarrow{CI} + \overrightarrow{IB}\right)$

C'est-à-dire : $3\overrightarrow{CI} = 2\overrightarrow{CI} + 2\overrightarrow{IB}$

Donc : $3\overrightarrow{CI} - 2\overrightarrow{CI} = 2\overrightarrow{IB}$

C’est-à-dire : $\overrightarrow{CI} = 2\overrightarrow{IB}$ donc $\overrightarrow{IC} = -2\overrightarrow{IB}$
Par suite : $k = -2$
4)a) $h(J) = K$ ؟؟؟؟؟
On a $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{DC}$ et on a $\overrightarrow{KI} = 2\overrightarrow{AB}$ donc $\overrightarrow{KI} = 2\overrightarrow{IJ}$ Donc : $\overrightarrow{IK} = -2\overrightarrow{IJ}$ Par suite : $h(J) = K$
4)b) On a $\begin{cases} h(J) = K \\ h(B) = C \end{cases}$ donc $\overrightarrow{CK} = -2\overrightarrow{BJ}$
D’après la propriété caractéristique de l’homothétie
Donc : $\left\|\overrightarrow{CK}\right\| = \left\|-2\overrightarrow{BJ}\right\|$ c’est-à-dire : $\left\|\overrightarrow{CK}\right\| = |-2|\left\|\overrightarrow{BJ}\right\|$
Donc $CK = 2BJ$
Et on a $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AB}$ donc $ABJI$ parallélogramme
Donc $BJ = AI$.
Donc $CK = 2AI$ par suite : $AI = \frac{1}{2}CK$.

Exercice 2 : Soit ABC un triangle tel que et $AB = 3$ et $BC = 4\sqrt{3}$ et $ABC = \frac{\pi}{6}$
I le milieu du segment $[BC]$
1) Calculer AC .
2) Montrer que $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 18$
3) Montrer que $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$
4) Calculer : $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AB}$ et en déduire la nature du triangle AIB

Solution : 1) Calculons AC
D’après le Théorème d'Al Kashi on a :
$AC^2 = BA^2 + BC^2 - 2BA \times BC \cos ABC$
$AC^2 = 9 + 48 - 24 \times \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$ donc $AC^2 = 21$
Par suite : $AC = \sqrt{21}$.
b) Montrons que : $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 18$
$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = BA \times BC \times \cos ABC = 3 \times 4\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 18$
3) Montrons que : $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$
Nous avons : $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BI}$
Puisque I est le milieu du segment $[BC]$
Nous obtenons : $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.
4) Calculons $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AB}$:
$\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AB} = \left(\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\right) \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB}^2 + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$
Donc : $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AB} = AB^2 - \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 9 - \frac{1}{2} \times 18 = 0$
On a : $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ Nous en déduisons que la droite (AI) est perpendiculaire à la droite (AB)
Et par conséquent le triangle AIB est rectangle en A

PROF:ATMANI NAJIB

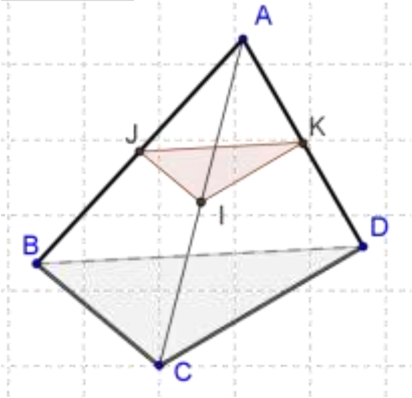
Exercice3 : $ABCD$ un tétraèdre

Soient I ; J et K les milieux respective des segments $[AC]$;$[AB]$et $[AD]$

1)Faire une figure

2)Montrer que : $(BCD) \parallel (IJK)$

Solution : 1)



2)Dans le triangle ABC on a : I le milieu du segment $[AC]$ et J le milieu du segment$[AB]$

Donc : $(IJ) \parallel (BC)$

Et dans le triangleABD on a : K le milieu du segment $[AD]$ et J le milieu du segment$[AB]$

Donc : $(JK) \parallel (BD)$

Et puisque : $(IJ) \parallel (BC)$ et $(BC) \subset (BCD)$

Alors : $(IJ) \parallel (BCD)$

Et puisque : $(JK) \parallel (BD)$et $(BD) \subset (BCD)$

Alors : $(JK) \parallel (BCD)$

Et comme on a : $(IJ) \parallel (BCD)$(1) et $(JK) \parallel (BCD)$(2) et $(IJ) \cap (JK) = \{J\}$(3)

Et $(IJ) \subset (IJK)$et $(JK) \subset (IJK)$(4)

De (1) et (2) et (3) et (4)

On déduit que: $(BCD) \parallel (IJK)$

PROF:ATMANI NAJIB