Correction

Exercice1 : Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes définie par :

1) $f(x)=\frac{x}{x^2-4}$. 2) $g(x)=\frac{x+7}{\sqrt{-x^2+4x-3}}$ 3) $h(x)=\sqrt{\frac{2x+1}{2-x}}$.

Solution:

1) $f(x)=\frac{x}{x^2-4}$ $D_f=\{x\in\mathbb{R}/x^2-4\neq 0\}$

$x^2-4=0$ Signifie $x^2-2^2=0$ Signifie $(x-2)(x+2)=0$ Signifie $x-2=0$ ou $x+2=0$

Signifie $x=2$ ou $x=-2$ Donc $D_f=\mathbb{R}/\{-2;2\}$

2) $g(x)=\frac{x+7}{\sqrt{-x^2+4x-3}}$ $D_g=\{x\in\mathbb{R}/-x^2+4x-3\succ 0\}$

$\Delta = 4^2 - 4 \times (-1)\times(-3) = 16 - 12 = 4$

$x_2=\frac{-4-2}{2\times(-1)}=\frac{-6}{-2}=3$ et $x_1=\frac{-4+2}{2\times(-1)}=\frac{-2}{-2}=1$

x	$-\infty$	1		3	$+\infty$
$Q(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

Donc . $D_g=]1;3[$

3) $h(x)=\sqrt{\frac{2x+1}{2-x}}$. $D_h=\left\{x\in\mathbb{R}/\frac{2x+1}{2-x}\geq 0 et\, 2-x\neq 0\right\}$

$2x+1=0$ Signifie $x=\frac{-1}{2}$

C'est-à-dire : $x=\frac{1}{3}$ et $x+1=0$ signifie ; $x=-1$

x	$-\infty$	$\frac{-1}{2}$		2	$+\infty$
$2x+1$	$-$	0	$+$		$+$
$2-x$	$+$		$+$	0	$-$
$\frac{2x+1}{2-x}$	$-$	0	$+$	$\|\|$	$-$

Donc : $D_h=\left[-\frac{1}{2};2\right[$

Exercice2 : Soit la fonction f définie par: $f(x)=\frac{x}{|3x-2|-|3x+2|}$

1) Déterminer le domaine de définition de f
2) Etudier la parité de la fonction f

3) Donner une interprétation graphique

Solution: 1) $f(x)=\dfrac{x}{|3x-2|-|3x+2|}$. $D_f=\{x\in\mathbb{R}/|3x-2|-|3x+2|\neq 0\}$

$|3x-2|-|3x+2|=0$ Signifie $|3x-2|=|3x+2|$ C'est-à-dire : $3x-2=3x+2$ ou $3x-2=-(3x+2)$

Signifie $-2=+2$ ou $6x=0$

C'est-à-dire : $2=-2$ (pas de solution) ou $x=0$

Signifie : $x=0$ Donc : $D_f=\mathbb{R}-\{0\}=\mathbb{R}^*$

2)Etude de la parité de la fonction f

☞Pour tout réel x, si $x\in\mathbb{R}^*$ alors $-x\in\mathbb{R}^*$

☞ $f(-x)=\dfrac{-x}{|-3x-2|-|-3x+2|}=\dfrac{-x}{|-(3x+2)|-|-(3x-2)|}$

$f(-x)=\dfrac{-x}{|3x+2|-|3x-2|}=\dfrac{-x}{-(|3x-2|-|3x+2|)}$ car $|-x|=|x|$

$f(-x)=\dfrac{x}{|3x-2|-|3x+2|}=f(x)$

Donc : $f(-x)=f(x)$

Donc f est une fonction paire,

3)Interprétation graphique :l'axe des ordonnées est un axe symétrie de la courbe représentative de f

Exercice3: Soit f une fonction numérique tel que : $f(x)=-x^2+4x+3$

1. Préciser le domaine de définition de f
2. Calculer le taux d'accroissement de fonction de f entre x_1 et x_2 tel que : $x_1\neq x_2$
3. Etudier la monotonie de f sur : $I=[2;+\infty[$ et sur $J=]-\infty;2]$
4. Dresser le tableau de variation de f
5. En déduire les extrémums de f sur $\mathbb{R}$
6. Trouver les points d'intersection de la courbe (C_f) avec les axes du repère
7. Soit g lafonction définie sur R par : $g(x)=2x$

   Tracer Les courbes représentatives de (C_f) et (C_g) dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$
8. Résoudre graphiquement et algébriquement l'équation : $f(x)=g(x)$
9. Résoudre graphiquement et algébriquement l'inéquation ; $f(x)\succ g(x)$

Solution: $f(x)=-x^2+4x+3$

1) f est une fonction polynôme donc : $D_f=\mathbb{R}$

2)Soient : $x_1\in\mathbb{R}$ et $x_2\in\mathbb{R}$ tel que : $x_1\neq x_2$

$$T(x_1;x_2)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{(-x_2^{\;2}+4x_2+3)-(-x_1^{\;2}+4x_1+3)}{x_2-x_1}=\frac{-x_2^{\;2}+4x_2+3+x_1^{\;2}-4x_1-3}{x_2-x_1}$$

$$T(x_1;x_2)=\frac{-x_2^{\;2}+x_1^{\;2}+4(x_2-x_1)}{x_2-x_1}=\frac{-(x_2^{\;2}-x_1^{\;2})+4(x_2-x_1)}{x_2-x_1}$$

$$T(x_1;x_2)=\frac{-(x_2-x_1)(x_2+x_1)+4(x_2-x_1)}{x_2-x_1}=\frac{(x_2-x_1)(-(x_2+x_1)+4)}{x_2-x_1}$$

Par suite : $T(x_1;x_2)=-(x_1+x_2)+4$

3)a) Etude de la monotonie de f sur : $I=[2;+\infty[$

Soient **:** $x_1\in[2;+\infty[$ et $x_2\in[2;+\infty[$ alors $x_1\geq 2$ et $x_2\geq 2$ implique $x_1+x_2\geq 4$

Donc $-(x_1+x_2)\leq -4$ par suite : $-(x_1+x_2)+4\leq 0$

Donc $T(x_1;x_2)\leq 0$ d'où : f est décroissante sur $I=[2;+\infty[$

3)b) Etude de la monotonie de f sur : $J=]-\infty;2]$

Soient : $x_1\in]-\infty;2]$ et $x_2\in]-\infty;2]$ alors : $x_1\leq 2$ et $x_2\leq 2$ cela implique $x_1+x_2\leq 4$

Donc $-(x_1+x_2)\geq -4$ par suite : $-(x_1+x_2)+4\geq 0$

Donc $T(x_1;x_2)\geq 0$

D'où : f est croissante sur $J=]-\infty;2]$

4) Tableau de variation : On a : $f(2)=-2^2+4\times 2+3=-4+8+3=7$

Donc :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	7	$\searrow$

5) $f(2)=7$ est un maximum de f sur $\mathbb{R}$

6)a) Intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses.

Les points d'intersection C et D de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses ont leurs ordonnées nulles, et leurs abscisses sont les solutions de l'´équation $f(x)=0$.

$f(x)=0$ Signifie $-x^2+4x+3=0$

$\Delta=b^2-4ac=16-4\times(-1)\times 3=16+12=28>0$

$$x_1=\frac{-4+\sqrt{28}}{2\times(-1)}=\frac{-4+\sqrt{4\times 7}}{-2}=\frac{-4+2\sqrt{7}}{-2}=\frac{-2\left(2-\sqrt{7}\right)}{-2}=2-\sqrt{7}$$

$$x_2=\frac{-4-\sqrt{28}}{2\times(-1)}=\frac{-4-\sqrt{4\times 7}}{-2}=\frac{-4-2\sqrt{7}}{-2}=\frac{-2\left(2+\sqrt{7}\right)}{-2}=2+\sqrt{7}$$

Donc les points d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses sont :

$C\left(2-\sqrt{7};0\right)$ et $D\left(2+\sqrt{7};0\right)$

b) Intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des ordonnées

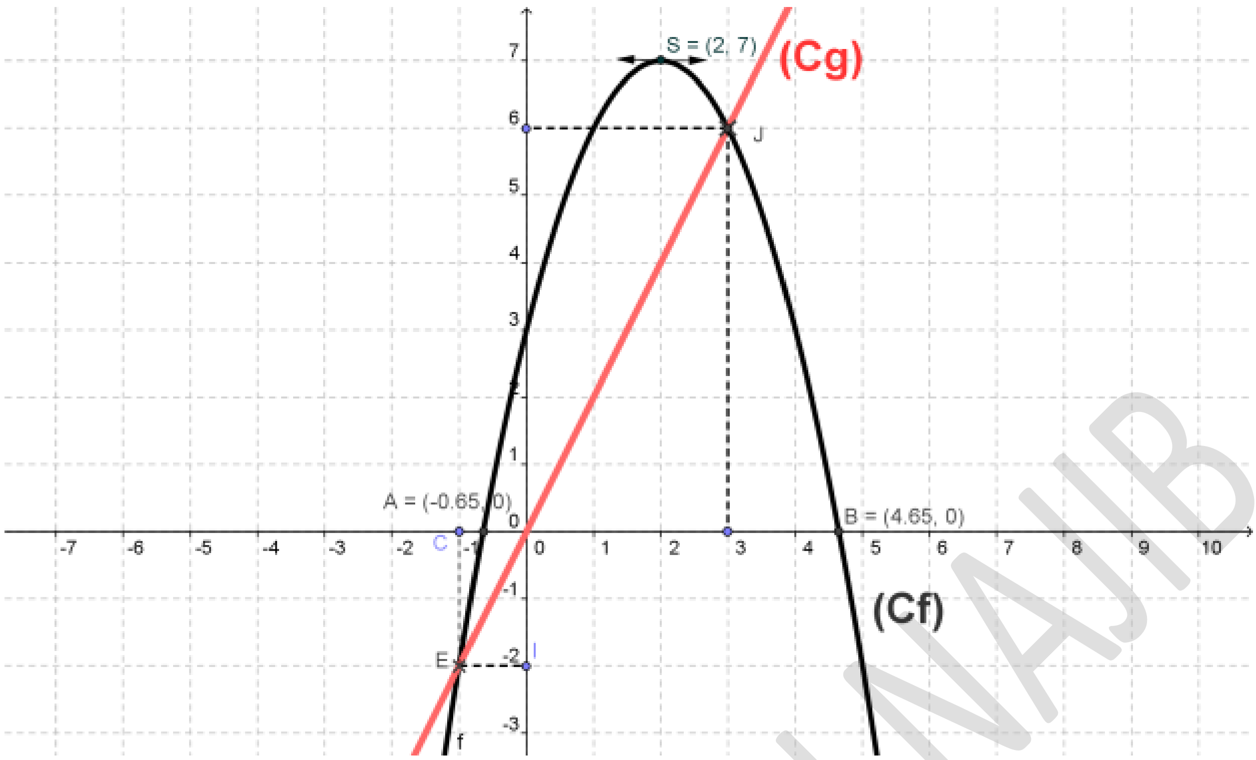
Le point d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des ordonnées a une abscisse nulle

Et on a $f(0)=-0^2+4\times 0+3=3$

Donc le point d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des ordonnées est : $E(0;3)$

7) Les courbes représentatives (C_f) et (C_g) sont données dans le repère ci-dessous :

-1	**0**	**1**	**2**	**3**	4	**5**
-2	3	6	7	6	3	-2



8) a) Résolution graphique de l'équation $f(x) = g(x)$

Il suffit de chercher les abscisses des points d'intersection des courbes (C_f) et (C_g)

On a donc $x = -1$ et $x = 3$ donc $S = \{-1;3\}$

b) Résolution algébrique de l'équation $f(x) = g(x)$

$f(x) = g(x)$ Signifie : $-x^2 + 4x + 3 = 2x$ c'est-à-dire : $-x^2 + 2x + 3 = 0$ $a = -1$ et $b = 2$ et $c = 3$

$\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4\times(-1)\times 3 = 4 + 12 = 16 > 0$ Donc : $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

C'est-à-dire : $x_1 = \frac{-2+\sqrt{16}}{2\times(-1)} = \frac{-2+4}{-2} = \frac{2}{-2} = -1$

et $x_2 = \frac{-2-\sqrt{16}}{2\times(-1)} = \frac{-2-4}{-2} = \frac{-6}{-2} = 3$ Donc : $S = \{-1;3\}$

9) a) Résolution graphique de l'inéquation $f(x) \succ g(x)$:

La courbe (C_f) est au-dessus de (C_g) si $x \in]-1;3[$

Donc $S =]-1;3[$

b) Résolution algébrique de l'inéquation $f(x) \succ g(x)$:

$f(x) \succ g(x)$ Signifie $-x^2 + 4x + 3 \succ 2x$

C'est-à-dire : $-x^2 + 2x + 3 \succ 0$

Les racines sont : $x_1 = -1$ et $x_2 = 3$

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$-x^2+2x+3$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Donc $S =]-1;3[$